# はじめての集合と位相

## 第 11 章 位相空間

水橋雅飛

明治大学 総合数理学部

2026/03/02

明治大学

**定義 11.1.**

集合 $X$ の部分集合族 $\mathcal{T}$(すなわち，$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$) が次の 3 条件を満たすとき，$\mathcal{T}$ を $X$ の**位相構造**または**位相**という.

$$
\begin{array}{ll}
\text{(O1)} & X \in \mathcal{T},\ \varnothing \in \mathcal{T} \\
\text{(O2)} & {}^\forall U_i \in \mathcal{T},\ \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T} \\
\Leftrightarrow \text{(O2')} & {}^\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T},\ U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T} \\
\text{(O3)} & {}^\forall U_\lambda \in \mathcal{T},\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T} \\
\Leftrightarrow \text{(O3')} & {}^\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T},\ \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}
\end{array}
$$

ノート

**定義 4.7.** より，和集合の定義は以下の通り.

$$\bigcup \mathcal{S} = \{x : \exists A \in \mathcal{S},\ x \in A\}$$

# 11.1 位相空間

**定義 11.2.**

位相構造 $\mathcal{T}$ が 1 つ定められた集合 $X$ を**位相空間**とよび，$(X,\mathcal{T})$ または $\mathcal{T}$ を省略して，$X$ で表す．このとき，$X$ の要素を位相空間 $(X,\mathcal{T})$ の**点**とよび，$\mathcal{T}$ の要素を $(X,\mathcal{T})$ の**開集合**とよぶ．

**ノート**

**定義 11.3.** について

**定義 10.3.** および**補題 10.5.** により定義される距離空間における開集合全体が成す集合族 $\mathcal{T}(X,d)$(**定義 10.15.**) は**定理 10.8.** より開集合系の公理を満たす．
したがって，距離空間 $(X,d)$ は，この自然に定まる開集合系 $\mathcal{T}(X,d)$ を位相構造としてもつ位相空間の一つの特殊例である．

**定義 11.8.**

位相空間 $X$ の任意の部分集合 $A$ に対し，$X - A$ が $X$ の開集合のとき，$A$ は $X$ の**閉集合**であるという．以下のノートの記法を用いれば，

$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow X - A \in \mathcal{F}$$

ノート

**補題 10.4.** より，やはり距離空間でもこの性質は成り立つ．以降閉集合系は $\mathcal{F}$ と表すが，$\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X) - \mathcal{T}$ であることに注意する．

**定義 11.9. (閉集合の基本 3 性質).**

(C1) $X \in \mathcal{F}, \ \varnothing \in \mathcal{F}$

(C2) ${}^\forall F_i \in \mathcal{F}, \ \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$

(C3) ${}^\forall F_\lambda \in \mathcal{F}, \ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

**定義 11.10.**

位相空間 $X$ の点 $x$ に対し，$x \in U$ を満たす $X$ の開集合 $U$ を $x$ の**近傍**と呼ぶ．

距離空間における近傍 $U(X, x, \varepsilon)$ に比べて，近傍の条件が緩い．このような少ない情報で近傍を定義すると距離関数によらない一般的な位相空間での性質を証明できる．

**定義 11.11.**

位相空間 $(X, \mathcal{T})$ において，任意の集合 $A \subseteq X$ と点 $x \in X$ に対し，次のように定義する．

(1) $x$ が $A$ の **内点**であるとは,

$$^{\exists}U \subseteq A, (U \in \mathcal{T}) \wedge (x \in U)$$

が成り立つことをいう．$A$ における内点全体の集合を **内部**といい, $\mathrm{Int}_X A$ と表す.

(2) $x$ が $A$ の **触点**であるとは,

$$^{\forall}U \in \mathcal{T}, (x \in U) \Rightarrow (U \cap A \neq \varnothing)$$

が成り立つことをいう．$A$ における触点全体の集合を **閉包**といい, $\mathrm{Cl}_X A$ と表す.

**註 11.13**

集合 $A \subseteq X$ の **外部** $\mathrm{Ext}_X A$ と**境界** $\mathrm{Bd}_X A$ を次で定義する．

$$\mathrm{Ext}_X A = X - \mathrm{Cl}_X A,$$

$$\mathrm{Bd}_X A = X - (\mathrm{Int}_X A \cup \mathrm{Ext}_X A).$$

**定理 11.12.**

任意の $A \subseteq X$ に対して，次が成立する．

(1)

$$\mathrm{Int}_X A = \bigcup \{ U : U \subseteq A,\ U \in \mathcal{T} \}.$$

(2)

$$\mathrm{Cl}_X A = \bigcap \{ F : A \subseteq F,\ F \in \mathcal{F} \}.$$

**定理 11.12.** と**定義 11.1.** より，$\mathrm{Int}_X A$ は $A$ に含まれる最大の $X$ の開集合であり，$\mathrm{Cl}_X A$ は $A$ を含む最小の $X$ の閉集合である．

**補題 11.14.**

任意の集合 $A \subseteq X$ について，次が成り立つ．

(1)

$$A \in \mathcal{T} \iff {}^{\forall}x \in A,\ {}^{\exists}U_x \in \mathcal{T},\ (x \in U_x) \land (U_x \subseteq A).$$

(2)

$$A \in \mathcal{F} \iff {}^{\forall}x \in X - A,\ {}^{\exists}U_x \in \mathcal{T},\ (x \in U_x) \land (U_x \cap A = \varnothing).$$

# 11.2 内部と閉包，集積点と孤立点

**定義 11.15.**

集合 $A \subseteq X$ とする．$x$ は $A$ の **集積点**であるとは,

$$^{\forall}U \in \mathcal{T}, (x \in U) \Rightarrow (U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing)$$

が成り立つことをいう．$A$ における集積点全体の集合を **導集合**と呼び, $A^d$ と表す.

$x$ は $A$ の **孤立点**であるとは,

$$(x \in A) \ \wedge \ (x \text{ が } A \text{ の集積点でない})$$

ことをいう．$A$ における孤立点全体の集合は $\mathrm{Cl}_X A - A^d$ と表される（**註 11.17**）.

**ノート**

11.2 節で定義してきた記号をここでまとめる．

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{Int}_X A &\iff {}^{\exists}U \subseteq A, (U \in \mathcal{T}) \wedge (x \in U),\\
x \in \mathrm{Cl}_X A &\iff {}^{\forall}U \in \mathcal{T}, (x \in U) \Rightarrow (U \cap A \neq \varnothing),\\
x \in \mathrm{Ext}_X A &\iff x \in X - \mathrm{Cl}_X A,\\
x \in \mathrm{Bd}_X A &\iff x \in X - (\mathrm{Int}_X A \cup \mathrm{Ext}_X A),\\
x \in A^d &\iff {}^{\forall}U \in \mathcal{T}, (x \in U) \Rightarrow (U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing),\\
x \in \mathrm{Cl}_X A - A^d &\iff x \in A \ \wedge \ x \notin A^d.
\end{aligned}
$$