はじめての集合と位相 第 1 章 〜 第 4 章

水橋 雅飛

2025/11/19

目次

はじめに

はじめての集合と位相の自主ゼミを行うにあたり, 章構成を今一度確認する. 第 1 章から第 6 章までは集合の基礎, そして第 8 章から第 13 章までが位相の基礎となっている. そして, 第 7 章, 第 14 章, 第 15 章が発展的内容である. 私の希望としては, 前半の集合基礎に関して, ある程度既知なものとして軽く行い, 余った時間で 8 〜 13 章をじっくり時間をかけて輪講していきたいと考えている. 発展的内容は余力があれば. ここで他のメンバ (~~おそらく熊谷しかいないだろうが~~) の意見も聞きたい.

1　第 1 章 集合とその基本演算

1.1　定義のまとめ

明らかにわかっているであろう定義は省略する.

- **定義 1.7**　$A \subseteq B \iff \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

> メモ
>
> 部分集合を表す記号として"$\subseteq$"の代わりに"$\subset$"を用いることがある. しかしながら, これらは全く同じ意味を持つとして議論を進める.

- **定義 1.12**　集合 A に対して, A の部分集合全体の集合を A のべき集合といい, $\mathcal{P}(A)$ とか, 2^A とか書かれる.　例: $A = \{1, 2\} \ \rightarrow\ \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- **定義 1.14**
  $A \cup B = \{x : x \in A\ \lor\ x \in B\}$
  $A \cap B = \{x : x \in A\ \land\ x \in B\}$
- **定義 1.17**
  $A - B = \{x : x \in A\ \land\ x \notin B\}$

> メモ
>
> $A - B$ なる表記の他に, $A \backslash B$ と書かれることもある.

1.2　例題・補題・演習問題等

- **註 1.8**　$\forall A\ \ (\varnothing \subseteq A)$　を示せ.
- **註 1.9**　$A \nsubseteq B \iff \exists x\ (x \in A\ \land\ x \notin B)$　を示せ.
- **補題 1.21**　任意の $A, B \subseteq U$ に対して, $A - B = A \cap B^c$ が成り立つ.

2　第 2 章 命題と論理演算

2.1　定義のまとめ

明らかにわかっているであろう定義は省略する.

- **定義 2.1**　真偽が定まる文章を**命題**という.
  例:　「12 は 4 で割り切れる」は真な命題,「北海道は関東地方に含まれる」は偽な命題である.

> メモ
>
> 真理値表は, これら命題を一般に P, Q, R とか置いて, それらが真な命題か偽の命題かで 2^n 通りに場合分けして議論している. 具体的に合成命題 ($P \wedge Q$ とか) の真理を知りたい場合は対応する行に着目すればよい (**例 2.9**).

- **定義 2.2**　変数 (リテラル) に値を代入すると命題になるものを**述語**という. 命題はリテラル数 0 の述語と考えれば, これは命題の拡張である.
- **定義 2.14**
  ある合成命題を P とおく. 真理値表において P の真理値が常に 1 であるとき, P を**トートロジー (恒真)** といい, $\top$ とか $\mathbf{1}$ とか書く. 逆に常に 0 であるとき, **矛盾命題 (恒偽)** といい, $\perp$ とか $\mathbf{0}$ とか書く.

2.2　例題・補題・演習問題等

- **問 8**　命題「$\sqrt{2}$ は有理数である」を p とし, 命題「$\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$」を q とする. このとき, 次の命題の真偽を調べよ.
  (1) $p \to q$,　(2) $q \to p$,　(3) $p \to (p \vee q)$,　(4) $(\neg p \wedge q) \to p$.

- **問 9** 次の合成命題を"$\to$"を使わない形で, できるだけ簡単に表せ.
  (1) $(p \to q) \to q$,
  (2) $(p \to q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

- **例題 2.23**
  任意の自然数 m, n に対し, mn が偶数ならば, m, n の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ.

3　第 3 章 直積集合と写像

3.1　定義のまとめ

明らかにわかっているであろう定義は省略する.

- **定義 3.4　直積集合**
$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}$

- **定義 3.6**　2 つの集合 X, Y が与えられ, X のどの要素に対しても, それぞれ Y の要素が一意に対応しているとき, この対応関係を X から Y への写像といい, $f : X \to Y$; $x \mapsto f(x)$ のように書く.

- **定義 3.10**　$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ を写像 f の**グラフ**という.

- **定義 3.13**　写像 $f : X \to Y,\ A \subseteq X$ と写像 $g : A \to Y$ に対し,

$$\forall x \in A\ (f(x) = g(x))$$

が成り立つとする. このとき, g を f の A への**制限**とよび, $g = f \restriction_A$ で表す. また, f を g の X への**拡張**とよぶ.

- **定義 3.16**　写像 $f : X \to Y$ に対して, 以下のように定める.

(1) 任意の $A \subseteq X$ に対して, A のすべての要素 x の像 $f(x)$ からなる集合を, f による A の**像**とよび, $\mathrm{Im}A$ とか $f(A)$ で表す. すなわち,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y.$$

(2) 任意の $B \subseteq Y$ に対して, $f(x) \in B$ を満たすすべての要素 $x \in X$ からなる集合を, f による B の**逆像**とよび, $f^{-1}(B)$ で表す. すなわち,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X.$$

- **定義 3.28**　ある写像 $f : X \to Y$ が全単射のとき, 各 $y \in Y$ はある $x \in X$ の像 $f'(x)$ として一意的に表される. このとき, 各 $f(x) \in Y$ に $x \in X$ を対応させる写像を f の**逆写像** (または, **逆関数, 逆変換**) とよび,

$$f^{-1} : Y \to X; f(x) \mapsto x$$

で表す. 逆写像 f^{-1} は f の逆の対応を与える写像である. 逆写像 f^{-1} が定義されるのは, f が全単射の場合だけであることに注意する.

3.2 例題・補題・演習問題等

- **問 6** 　次の中から, 写像の定義に反しているものを選びなさい.
  (1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; x \mapsto \tan x$
  (2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; x \mapsto \pm\sqrt{x}$
  (3) $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}\ ; (m, n) \mapsto m - n$
  (4) $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}\ ; (m, n) \mapsto m - n$

- **問 10** 　関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; x \mapsto x^2 - 2x - 1$ 　について, 次の問に答えよ.
  (1) $f([0, 1]), f([-1, 2]), f([0, +\infty]), f(\mathbb{R})$ を求めよ.
  (2) $f^{-1}([-1, 1]), f^{-1}([-2, 1]), f^{-1}([0, +\infty])$ を求めよ.
  (3) $f([-a, a])$ $(a > 0)$ と $f^{-1}([-b, b])$ $(b > 0)$ を求めよ.

- **補題 3.21**
  任意の写像 $f : X \to Y$ と, 任意の $A_1, A_2 \subseteq X$ に対し,
  $$A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$$
  が成立することを示せ.

- **問 14**
  任意の写像 $f : X \to Y$ と, 任意の $B_1, B_2 \subseteq Y$ に対して, 次の (1)〜(4) が成立することを示せ.
  (1) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,
  (2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
  (3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
  (4) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

- **補題 3.25** 　任意の写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対して, 次が成り立つことを示せ.
  (1) f と g がともに全射ならば, $g \circ f$ は全射である.
  (2) f と g がともに単射ならば, $g \circ f$ は単射である.

- **補題 3.31** 　任意の写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対して, 次が成立する.
  (1) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射である.
  (2) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

- **定理 3.30** 　2 つの写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ に対して,
  $$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$
  が成り立つとする. このとき, f は全単射で, $g = f^{-1}$ が成り立つ.