はじめての集合と位相 第 5 章

水橋 雅飛

2025/12/03

はじめに

前日に何故かファイルが消失したため, 書類の準備が間に合いませんでした. 申し訳ありません.

5.3 実数の公理の補足

1. 群・環・体の定義

群 (Group) の定義

集合 G とその上の二項演算「$+: G \times G \to G$」が次の 4 条件を満たすとき，組 $(G,+)$ を **群 (Group)** という.

(i)（閉性） $\forall a,b \in G$ に対し，$a+b \in G$.
(ii)（加法単位元 (or 零元) の存在） $\exists 0 \in G$ が存在して，$\forall a \in G$ に対し $0+a=a+0=a$.
(iii)（逆元の存在） $\forall a \in G$ に対し，$\exists a^{-1} \in G$ が存在して，$a+a^{-1}=a^{-1}+a=0$.
(iv)（結合律） $\forall a,b,c \in G$ に対し，$(a+b)+c=a+(b+c)$.

これに加えて, 以下の交換則が追加で成り立つ場合, $(G,+)$ は**可換群 (アーベル群)** と呼ばれる.

$$\text{(v)（交換則）}\quad \forall a,b \in G,\ a+b=b+a.$$

群の定義は集合に加法の構造を入れたものと解釈すれば良い. 私は「閉結単逆」のように無理やり覚えた.

(2) 群に関する具体例

(a) 整数全体と通常の加法の組 $(\mathbb{Z},+)$ は群かどうか.
(b) 自然数全体と通常の加法の組 $(\mathbb{N},+)$ は群かどうか.

環 (Ring) の定義

集合 R とその上の二つの二項演算「$+: R \times R \to R$」および「$\cdot: R \times R \to R$」が次の条件を満たすとき，組 $(R,+,\cdot)$ を **環 (Ring)** という.

(i) 組 $(R,+)$ が可換群である.
(ii)（乗法単位元の存在）$\exists e \in R, \forall x \in R,\quad x \cdot e = e \cdot x = x$.
(iii)（乗法の結合律）$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
(iv)（左分配律）$\forall a,b,c \in R,\quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.
(v)（右分配律）$\forall a,b,c \in R,\quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

これに加えて, 以下の交換則が追加で成り立つ場合, $(R,+,\cdot)$ は**可換環**と呼ばれる.

$$\text{(vi)（交換則）}\quad \forall a,b \in R,\ a \cdot b = b \cdot a.$$

環の定義は群に乗法の構造を入れたものと解釈すれば良い. 私は「ア単結分分」のように無理やり覚えた.

(2) 環に関する具体例

(a) 整数全体と通常の加法, 乗法の組 $(\mathbb{Z},+,\times)$ は環かどうか.
(b) 2×2 実行列全体の集合を $\mathcal{M}$ とおく. $\mathcal{M}$ は行列の加法, 乗法 $\oplus, \otimes$ に対して環かどうか.

体 (Field) の定義

集合 F とその上の二つの二項演算 「$+ : F \times F \to F$」および 「$\cdot : F \times F \to F$」 が次の条件を満たすとき，組 $(F, +, \cdot)$ を **体 (Field)** という.

(i) 組 $(F, +, \cdot)$ が可換環である.

(ii) $(\forall x \in F - \{0\})\ \exists\, x^{-1} \in F,\ \ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

体の定義は環に除法の構造を入れたものと解釈すれば良い.

(3) 体に関する具体例

(a) 有理数集合と通常の加法, 乗法の組 $(\mathbb{Q}, +, \times)$ は体かどうか.

(b) 多項式とと通常の加法, 乗法の組 $(\mathbb{R}[x], +, \times)$ は体かどうか.

順序体 (Ordered Field) の定義

集合 F とその上の二つの二項演算 「$+ : F \times F \to F$」および 「$\cdot : F \times F \to F$」 が次の条件を満たすとき，組 $(F, +, \cdot)$ を **順序体 (Ordered Field)** という.

(i) 組 $(F, +, \times)$ が体である.
ここで, 体 F に部分集合 P が存在し, $-P := \{-x : x \in P\}$ とおくとき, 以下が満たされる.

(ii) $P \cap -P = \varnothing$.

(iii) $P \cup \{0\} \cup -P = F$.

(iv) $(\forall x, y \in P)((x + y \in P) \wedge (x \cdot y \in P))$.

集合 P の要素を**正の数**とよび, $-P$ を**負の数**とよび, 大小関係を以下に定義する.

$$\forall x, y \in F,\ y + (-x) \in P \Longrightarrow x < y,$$
$$(x < y) \wedge (x = y) \Longrightarrow x \leq y$$

順序体の定義は体に大小関係の構造を入れたものと解釈すれば良い.

メモ

実数集合 $\mathbb{R}$ や, 有理数集合 $\mathbb{Q}$ は通常の加法, 乗法に対して順序体であることが知られている (定義より簡単に示せる). 当節では実数集合を特徴づけるために追加で定義している.

定義・定理などまとめ

- **定義 5.10** 順序体 F の要素の列 $\{x_n\}$ を数列とよぶことにする．以下の用語を定義する．
  - 数列 $\{x_n\}$ が**上に有界** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b \in F,\ x_n \le b$
  - 数列 $\{x_n\}$ が**単調増加** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \le x_{n+1}$
  -
  $$\text{単調増加列 } \{x_n\} \text{ が } x \text{ に}\textbf{収束する} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (1)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \le x, \\ (2)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists m \in \mathbb{N})\ x - \varepsilon < x_m. \end{cases}$$

  下に有界, 単調減少とその収束に関しても同様に定義される (**問 8**).
- **連続性の公理**　上に有界な任意の単調増加列は収束する．
- **命題 5.11 (アルキメデスの公理)**　$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ x < n.$
- **命題 5.13** $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{Z})\ a - 1 \le x < a.$
- **命題 5.14 (有理数の稠密性)**　$(\forall x, y \in \mathbb{R}, (y > x))(\exists r \in \mathbb{Q})\ x < r < y.$
- **命題 5.15 (無理数の稠密性)**　$(\forall x, y \in \mathbb{R}, (y > x))(\exists s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})\ x < s < y.$
- **命題 5.17** 任意の $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \ni p \ge 2$ に対して, ある $a_0 \in \mathbb{Z}$, と各 $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ が存在して,
  $$x = a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} + \cdots$$
  として表される．