

はじめての集合と位相

第8章 距離空間

水橋雅飛

明治大学 総合数理学部

2026/01/14



8.1 ユークリッド空間

定義 8.1.

\mathbb{R}^n の任意の 2 点 $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ に対して,

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

を、 p, q 間の**ユークリッドの距離**という。ここで、記号 d は \mathbb{R}^n の 2 点の組 (p, q) に実数 $d(p, q)$ を対応させる関数

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; (p, q) \longmapsto d(p, q)$$

であると考えられる。関数 d を**ユークリッドの距離関数**という。

8.2 距離空間

定義 8.6.

集合 X と関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられ, 任意の $x, y, z \in X$ に対し, 次の 4 つのことが成り立つとする.

(M1) $d(x, y) \geq 0$. (非負性)

(M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$. (非退化性)

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$. (対称性)

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (三角不等式)

このとき, d を X 上の**距離関数**という.

定義 8.7.

距離関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が 1 つ定められた集合 X を**距離空間**とよび, (X, d) で表す. 距離関数 d を明示する必要がない場合は, (X, d) を単に X と略記する.

8.2 距離空間

例題

ユークリッド空間 (\mathbb{R}^n, d_2) が距離空間であることを示せ (定理 8.5.).

ノート

三角不等式について、以下の **Schwarz の不等式** を用いる.

Schwarz の不等式 $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ に対し、以下の不等式が成立する.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

8.2 距離空間

例 8.9

任意の 2 点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

と定める. このとき, d_1 と d_∞ もまた \mathbb{R}^n 上の距離関数であることが証明できる.

ノート

これらを一般化した L^p 距離というものがある.

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$$

8.2 距離空間

補題 8.10.

任意の 2 点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して, 不等式

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \quad (8.4)$$

が成立する.

8.2 距離空間

例 8.12

実数を成分とする $n \times n$ 行列全体の集合を $M(n, \mathbb{R})$ で表す. 任意の行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ に対して,

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2}$$

と定めると, 定理 8.5 と同様にして, 関数 $d: M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ は $M(n, \mathbb{R})$ 上の距離関数であることが証明できる. したがって, $(M(n, \mathbb{R}), d)$ は距離空間である. この距離を**フロベニウス距離**とよぶ.

問 7

距離空間 $(M(n, \mathbb{R}), d)$ において, 距離 $d(E, -3E)$ を求めよ. ただし, E は n 次単位行列とする.

8.3 部分距離空間と直積距離空間

定義 8.13.

2つの距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ が与えられ, $X \subseteq Y$ が成り立ち, さらに条件

$$\forall x, y \in X, d_X(x, y) = d_Y(x, y)$$

が満たされるとき, (X, d_X) を (Y, d_Y) の**部分距離空間**という.

逆に, (Y, d_Y) が与えられたとき, 任意の部分空間 $X \subseteq Y$ に対して, 距離関数 $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ の $X \times X$ への制限

$$d \upharpoonright_{X \times X} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto d(x, y)$$

は X 上の距離関数である. このとき, 距離空間 $(X, d \upharpoonright_{X \times X})$ は (Y, d_Y) の部分距離空間である.

8.3 部分距離空間と直積距離空間

定義 8.15.

距離空間 $(X_1, \rho_1), \dots, (X_n, \rho_n)$ が与えられ, さらに直積集合を

$$X = \prod_{i=1}^n X_i \text{ のようにおく.}$$

このとき, X の元 $p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n)$ に対し,

$$\rho(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i(p_i, q_i)}$$

なる関数を定義すると, (X, ρ) は距離空間となる.

これを直積距離空間とよぶ.

例題

(X, ρ) は距離空間となることを示せ.

8.3 部分距離空間と直積距離空間

問 8

直積距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1) \times (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ における 2 点 $p = (0, 0), q = (1, 1)$ 間の距離を求めよ.

8.4 点列の収束

定義 8.16.

任意の集合 X に対し, 写像 $s: \mathbb{N} \rightarrow X$ を X の点列といい, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $s(n)$ を点列 s の第 n 項という. ただし, 本書では, 点列の第 n 項を x_n などで表し, このとき点列を $\{x_n\}$ で表す.

定義 8.17.

距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が点 $x \in X$ に収束するとは, 任意の正数 ε に対して, ある自然数 n_ε が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_\varepsilon \text{ ならば } d(x, x_n) < \varepsilon) \quad (8.6)$$

が成り立つことをいう. このとき, x を $\{x_n\}$ の極限点という.

8.4 点列の収束

註 8.18

定義 8.17 について説明を加える. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が点 $x \in X$ に収束するとは, 直観的には, n が大きくなるにしたがって, x_n が x に限りなく近づくことである.

そのことを「任意の正数 ε に対して,

$$\text{集合 } N_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : d(x, x_n) \geq \varepsilon\} \text{ は有限集合} \quad (\ast)$$

である」と表現する.

$$\begin{aligned} (\ast) &\iff (\exists n_\varepsilon)(N_\varepsilon \subseteq \{1, 2, \dots, n_\varepsilon\}) \\ &\iff (\exists n_\varepsilon)(\forall n)(n > n_\varepsilon \text{ ならば } n \notin N_\varepsilon) \\ &\iff (\exists n_\varepsilon)(\forall n)(n > n_\varepsilon \text{ ならば } d(x, x_n) < \varepsilon). \end{aligned}$$

したがって, **定義 8.17** で与えた条件と同値であることがわかる.

8.4 点列の収束

補題 8.20.

距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が点 $x \in X$ に収束するためには、実数列 $\{d(x, x_n)\}$ が 0 に収束することが必要十分である。

命題 8.21.

直積距離空間 $(X, \rho) = \prod_{i=1}^n (X_i, \rho_i)$ の点列 $\{p_k\}$ と点 p に対して、

$$p_k = (x_k(1), x_k(2), \dots, x_k(n)), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$p = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

とおく。このとき、 $p_k \rightarrow p$ ($k \rightarrow \infty$) であるためには、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $x_k(i) \rightarrow x(i)$ ($k \rightarrow \infty$) が成り立つことが必要十分である。