はじめての集合と位相
第 10 章 距離空間の位相構造

水橋雅飛

明治大学 総合数理学部

2026/02/12

10.0 まえがき

今回も教科書に基づいて資料作成をした．教科書は日本語で多くの定理や補題・命題を記述しているが，それでは証明の度に定義や補題を参照しなければならない．そのため本資料では日本語ではなくそのほとんどを定義や補題に基づいた論理式で記述していることに注意されたい．

10.1 開集合と閉集合

定義 10.1.

(X, d) を距離空間とし，$A \subseteq X$，$x \in X$ とする．

(1) x は A の内点　$\exists \varepsilon > 0,\ U(X, x, \varepsilon) \subseteq A$

(2) x は A の外点　$\exists \varepsilon > 0,\ U(X, x, \varepsilon) \cap A = \varnothing$

(3) x は A の境界点　$\forall \varepsilon > 0,\ \underline{U(X, x, \varepsilon) \not\subseteq A} \ \wedge\ U(X, x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$

$$\iff U(X, x, \varepsilon) \cap (X - A) \neq \varnothing$$

定義 10.2.

$A \subseteq X$ とする．このとき，X における A の内点全体の集合を X における A の**内部（interior）**といい，$\mathrm{Int}_X\, A$ で表す．また，X における A の外点全体の集合と境界点全体の集合を，それぞれ X における A の**外部（exterior）**および**境界（boundary）**とよび，$\mathrm{Ext}_X\, A$，$\mathrm{Bd}_X\, A$ で表す．

定義 10.3.

$$\text{(1) } A \text{ が } X \text{ の開集合} \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{Bd}_X A \subseteq A,$$
$$\text{(2) } A \text{ が } X \text{ の開集合} \overset{\text{def}}{\iff} A \cap \mathrm{Bd}_X A = \varnothing$$

問 1

$\mathbb{E}^1$ における集合 $A = [0,1] \cup (2,3), \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ の内部，外部，境界を求めて，これらの集合が $\mathbb{E}^1$ の開集合であるか閉集合であるかを調べよ．

10.1 開集合と閉集合

補題 10.4.

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathrm{Bd}_X A \cap A = \varnothing & \Longrightarrow \quad \mathrm{Bd}_X(X - A) \subseteq X - A \\ (2) & \mathrm{Bd}_X A \subseteq A & \Longrightarrow \quad \mathrm{Bd}_X(X - A) \cap (X - A) = \varnothing \end{array}$$

補題 10.5.

次の同値関係が成り立つ.

$$\begin{array}{lll} (1) \ \mathrm{Bd}_X A \cap A = \varnothing & \Longleftrightarrow & \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ U(X, x, \varepsilon) \subseteq A \\ (2) \ \mathrm{Bd}_X A \subseteq A & \Longleftrightarrow & \forall x \in (X - A),\ \exists \varepsilon > 0,\ U(X, x, \varepsilon) \cap A = \varnothing \end{array}$$

以降, 適宜**補題 10.5.** を用いて開 (閉) 集合性を特徴付ける.

補題 10.6.

補題 10.5. の同値関係により, 以下のように書き換えられる.

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0, \forall y \in U(X, x, \varepsilon),\ \exists \delta > 0,\ U(X, y, \delta) \subseteq U(X, x, \varepsilon)$$

補題 10.5. の同値関係により，以下のように書き換えられる.

補題 10.7.

$$\forall x \in X,\ \forall y \in X - \{x\},\ \exists \varepsilon > 0,\ U(X, y, \varepsilon) \cap \{x\} = \varnothing$$

定理 10.8. X **の開集合に関する基本三性質.**

(O1) $\mathrm{Bd}_X X \cap X = \varnothing,$
$\mathrm{Bd}_X \varnothing \cap \varnothing = \varnothing.$

(O2) $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ とおく.
$\forall i,\ \forall x \in U_i,\ \exists \varepsilon_i > 0,\ U(X, x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$
$\Rightarrow\ \forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ U(X, x, \varepsilon) \subseteq U$

(O3) $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とおく.
$\forall \lambda,\ \forall x \in U_\lambda,\ \exists \varepsilon_\lambda,\ U(X, x, \varepsilon_\lambda) \subseteq U_\lambda$
$\Rightarrow\ \forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ U(X, x, \varepsilon) \subseteq U$

命題 10.10.

$$\forall x \in (X - A),\ \exists \varepsilon > 0,\ U(x, \varepsilon) \cap A = \varnothing$$
$$\iff \forall \{x_n\}, x \in X,\ ((x_n \to x) \wedge (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A)) \Rightarrow x \in A.$$

ノート

$$\forall \{x_n\}, x \in X,\ x_n \to x,\ \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A \Rightarrow x \in A.$$

のように曖昧に書かないこと.

例題 10.11.

命題 10.10 より，任意の連続写像 $f : X \to Y$ について，

$$\forall \{p_n\}, p \in X \times Y,\ ((p_n \to p) \wedge (\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq G(f))) \Rightarrow p \in G(f).$$

を示せばよい.

10.2 写像の連続性と開集合，閉集合

定理 10.12.

任意の写像 $f : X \to Y$ に対して，次の 3 条件は同値である.

(1) f は連続写像である.

(2) Y の任意の開集合 V に対し,$f^{-1}(V)$ は X の開集合である.

(3) Y の任意の閉集合 F に対し,$f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.

定理 10.13.

写像 $f : X \to Y$ が同相写像であることと，次は同値である：

$$\begin{cases} f \text{ は全単射である.} \\ \forall A \subseteq X,\ A \text{ は } X \text{ の開集合} \iff f(A) \text{ は } Y \text{ の開集合.} \end{cases}$$

10.3 距離空間の開集合系

定義 10.15.

距離空間 (X,d) のすべての開集合からなる集合族を，(X,d) の**開集合系**とよび，$\mathcal{T}(X,d)$ または $\mathcal{T}(X),\mathcal{T}(d)$ などで表す.

開集合系を定義したことにより,「A は X の開集合である」と書く代わりに，$A\in\mathcal{T}(X)$ と書くことができる.

定理 10.16.

X 上の距離関数 d,d' が位相的に同値 $\iff$ $\mathcal{T}(d)=\mathcal{T}(d')$

ノート

定義 9.20. 任意の集合 X 上の 2 つの距離関数 d,d' に対し，恒等写像

$$\mathrm{id}_X:(X,d)\to(X,d')$$

が同相写像のとき，d,d' は**位相的に同値**であるという.

定理 10.20.
距離空間 X が距離空間 Y の部分空間のとき，等式

$$\mathcal{T}(X) = \{G \cap X : G \in \mathcal{T}(Y)\}$$

が成立する．

方針
任意の A に対して，二つの命題

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{T}(X) &\Longrightarrow A \in \{G \cap X : G \in \mathcal{T}(Y)\} \quad (1) \\ A \in \{G \cap X : G \in \mathcal{T}(Y)\} &\Longrightarrow A \in \mathcal{T}(X) \quad (2) \end{aligned}$$

を示せばよい．